EIN VERFAHREN ZUR BERECHNUNG DER DIVIDENDENANGLEICHUNG IN DER GROSSLEBENSVERSICHERUNG IM ZUSAMMENHANG MIT DER RESERVEBESTIMMUNG MITTELS ELEKTRONISCHER EINZELRECHNUNG

INAUGURALDISSERTATION

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Basel

1962

von

WALTER SPENGLER

aus Basel

Basel, 1964

Stephan Joos

EIN VERFAHREN ZUR BERECHNUNG DER DIVIDENDENANGLEICHUNG IN DER GROSSLEBENSVERSICHERUNG IM ZUSAMMENHANG MIT DER RESERVEBESTIMMUNG MITTELS ELEKTRONISCHER EINZELRECHNUNG

INAUGURALDISSERTATION

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Basel

von

WALTER SPENGLER

aus Basel

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN -

Basel, 1964

Stephan Joos

Genehmigt von der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät auf Antrag der

Herren Dozenten Prof. Dr. E. Zwinggi und Dr. P. Leepin.

Basel, den 5. Juni 1962

Prof. Dr. M. Eichler
Dekan

Meiner lieben Mutter

Inhalt

1. Einleitung 6

1. Teil

Theoretische Grundlagen des Verfahrens

2. Dividendendeckungskapital und Dividendenfonds 7

2.1. Notwendiger Dividendenfonds für eine einzelne Versicherung 8

2.2. Notwendiger Dividendenfonds im offenen Bestand ... 10

2.2.1. Konstante Dividende 11

2.2.2. Steigende Dividende 12

2.3. Approximation einiger Korrekturglieder bezogen auf den jeweiligen Dividendenbarwert 14

2.4. Das Korrekturglied in der Praxis 16

2.5. Dividende in Bonusform 17

3. Aenderungen des Dividendenplanes 19

3.1. Konstante Dividende 19

3.2. Steigende Dividende 20

3.2.1. Aenderung von Δ 20

3.2.2. Aenderung von δ 20

3.2.3. Aenderung von Δ und δ 21

3.3. Dividende in Bonusform 22

2. Teil

Praktische Durchführung einer Dividendenkontrolle an einem Versuchsbestand

4. Grundlegende Angaben 23

5. Kurze Beschreibung des Rechenvorganges 24

6. Zahlenmässige Ergebnisse 25

7. Berechnung der Aenderungssätze 26

8. Erläuterungen zu den Resultaten 27

Zusammenfassung 29

Literaturverzeichnis 30

1. Einleitung.

In der Lebensversicherung ermöglichen die programmgespeicherten elektronischen Rechengeräte bei der Ermittlung der technischen Rücklagen das Ersetzen der Gruppen- und Näherungsmethoden durch die Einzelrechnung. Nebst Zeitgewinn und Einsparungen an Verwaltungskosten bietet uns die Einzelrechnung die Möglichkeit, parallel zur Bilanzrechnung Erhebungen durchzuführen, die bisher separate Arbeitsgänge erfordert haben. Die wichtigsten dieser Nebenrechnungen sind die Bestimmung des Dividendendeckungskapitals und die Anpassung des Dividendenplanes, zwei Probleme, mit denen wir uns in der Folge befassen wollen.

1. Teil.

Theoretische Grundlagen des Verfahrens.

Dividendendeckungskapital und Dividendenfonds.

Die Berechnung der Dividendenangleichung kann sich auf zwei Begriffe stützen.

a) Man verwendet als Basis das Dividendendeckungskapital ${}_+V_x^v - {}_+V_{x_{a^*}}^{a^*}$, das, zum Barwert der künftig eingehenden Gewinnzuschläge $\Pi_x - P_x^{a^*}$ addiert, gleich dem Barwert der künftigen Gewinnanteile ist.

Es bedeuten :

${}_+V_x^v$: vollständiges Deckungskapital.

${}_+V_{x_{a^*}}$: ausreichendes Deckungskapital, β bezogen auf die Tarifprämie.

Π_x : Tarifprämie.

$P_x^{a^*}$: ausreichende Prämie, die den Versicherungsleistungen im engeren Sinne und den Verwaltungskosten α, β und γ entspricht, wobei β auf Π_x zu beziehen ist.

b) Es ist naheliegend, von der einfach zu bestimmenden Differenz zwischen dem vollständigen Deckungskapital, berechnet nach Grundlagen 2. Ordnung, und dem "vorhandenen" Deckungskapital auszugehen, wobei das Netto- oder das Zillmerdeckungskapital nach Grundlagen 1. Ordnung "vorhanden" sein kann.

Den Unterschied zwischen dem vollständigen und dem " vorhandenen " Deckungskapital bezeichnen wir als notwendigen Dividendenfonds.

2.1. Notwendiger Dividendenfonds für eine einzelne Versicherung.

Wir betrachten eine gemischte Versicherung mit einer während der Versicherungsdauer jährlich und vorschüssig zahlbaren Tarifprämie Π_x . Der vorgesehene Gewinnanteil in der Höhe $\Delta \cdot \Pi_x$ soll erstmals im Zeitpunkt h, danach jährlich und letztmals in n-1 zur Auszahlung gelangen. Vom Beginn der Versicherung bis zum Bilanztag seien $t+½$ Jahre verflossen, wobei $t+½ > h$ sein soll.

Versehen wir der Einfachheit halber diejenigen Glieder, die auf Grundlagen 1. Ordnung beruhen, mit einem Akzent, so setzt sich der notwendige Dividendenfonds, unter Verwendung von Nettoreserven, aus folgenden Gliedern zusammen :

1) $A_{x+t+½:\overline{n-t-½}|}$:

Anwartschaft auf die Todes- und Erlebensfalleistung.

2) $\beta \Pi_x \dfrac{N_{x+t+1} - N_{x+n}}{D_{x+t+½}}$

Barwert der β-Kosten.(Im Zeitpunkt der Prämienzahlung als verbraucht angesehen).

3) $\gamma \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{N_{x+t+1} - N_{x+n}}{D_{x+t+½}} \right)$

Barwert der γ -Kosten. (Proportionale Verteilung über das ganze Jahr) .

4) $(1-\beta) \Delta \Pi_x \dfrac{N_{x+t+1} - N_{x+n}}{D_{x+t+½}}$

Barwert der konstanten Gewinnanteile.

Von der Summe dieser vier Glieder sind zur Berechnung des notwendigen Dividendenfonds die beiden folgenden zu subtrahieren.

5) $\pi_x \dfrac{N_{x+t+1} - N_{x+n}}{D_{x+t+\frac{1}{2}}}$

Barwert der künftigen Tarifprämien.

6) $\dfrac{{}_tV'_x + {}_{t+1}V'_x + P'_x}{2} = {}_{t+\frac{1}{2}}V'_x$

Nettodeckungskapital und Nettoprämienübertrag am Bilanztag.

Wenn wir in Glied 1) die Kommutationszahlen einsetzen, erhalten wir :

$$A_{x+t+\frac{1}{2}\overline{n-t-\frac{1}{2}|}} = A_{x+t+\frac{1}{2}} - \frac{D_{x+n}}{D_{x+t+\frac{1}{2}}} A_{x+n} + \frac{D_{x+n}}{D_{x+t+\frac{1}{2}}} =$$

$$= 1 - d\,\ddot{a}_{x+t+\frac{1}{2}} - \frac{D_{x+n}}{D_{x+t+\frac{1}{2}}}\, d\,\ddot{a}_{x+n} = 1 - d\,\ddot{a}_{x+t+\frac{1}{2}\overline{n-t-\frac{1}{2}|}} \approx$$

$$\approx 1 - \frac{\frac{D_{x+t+\frac{1}{2}}}{2} + N_{x+t+1} - N_{x+n}}{D_{x+t+\frac{1}{2}}} = 1 - d\left(\frac{1}{2} + \frac{N_{x+t+1} - N_{x+n}}{D_{x+t+\frac{1}{2}}}\right)$$

Die Formel für den notwendigen Dividendenfonds lautet nun :

$$1 - d\left(\frac{1}{2} + \frac{N_{x+t+1} - N_{x+n}}{D_{x+t+\frac{1}{2}}}\right) + \beta\,\pi_x \frac{N_{x+t+1} - N_{x+n}}{D_{x+t+\frac{1}{2}}} +$$

$$+ \gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{N_{x+t+1} - N_{x+n}}{D_{x+t+\frac{1}{2}}}\right) + (1-\beta)\,\Delta\pi_x \frac{N_{x+t+1} - N_{x+n}}{D_{x+t+\frac{1}{2}}} -$$

$$- \pi_x \frac{N_{x+t+1} - N_{x+n}}{D_{x+t+\frac{1}{2}}} - \frac{{}_tV'_x + {}_{t+1}V'_x + P'_x}{2}$$

In diesem Ansatz werden die Abschlusskosten nicht berücksichtigt. Sollen sie in die Rechnung eingehen, so ist vom Zillmer - deckungskapital als dem "vorhandenen" Deckungskapital auszugehen. Bilanzdeckungskapital und Prämienübertrag sind gleich

$$\frac{{}_tV_x^{\bar{\alpha}\prime} + {}_{t+1}V_x^{\bar{\alpha}\prime} + P_x^{\bar{\alpha}\prime}}{2}$$

Die beiden Umformungen

$$ {}_tV_x^{\bar{\alpha}} = {}_tV_x - \bar{\alpha}\,\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} + \bar{\alpha}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = $$

$$ = 1 + \bar{\alpha} - \frac{(1+\bar{\alpha})\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \bar{\alpha} = (1+\bar{\alpha})\,{}_tV_x - \bar{\alpha} $$

und

$$ P_x^{\bar{\alpha}} = P_x + \frac{\bar{\alpha}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d + \frac{\bar{\alpha}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = (1+\bar{\alpha})P_x + d\bar{\alpha} $$

erlauben uns, das Zillmerdeckungskapital durch das Nettodeckungskapital auszudrücken. Wir erhalten :

$$ \frac{{}_tV_x^{\bar{\alpha}'} + {}_{t+1}V_x^{\bar{\alpha}'} + P_x^{\bar{\alpha}'}}{2} = \frac{(1+\bar{\alpha})\,{}_tV_x' - \bar{\alpha} + (1+\bar{\alpha})\,{}_{t+1}V_x' - \bar{\alpha} + (1+\bar{\alpha})P_x' + d'\bar{\alpha}}{2} = $$

$$ = \frac{(1+\bar{\alpha})\left({}_tV_x' + {}_{t+1}V_x' + P_x'\right)}{2} - \bar{\alpha} + \frac{d'\bar{\alpha}}{2} = (1+\bar{\alpha})\,{}_{t+\frac{1}{2}}V_x' - \bar{\alpha} + \frac{d'\bar{\alpha}}{2}. $$

2.2. Notwendiger Dividendenfonds im offenen Bestand.

Wir gehen zu einem offenen Bestand über, das heisst zu einem Bestand mit Eintritten, Austritten, Todesfällen, Stornierungen, Abläufen usw., wobei die gleichmässige Verteilung der Ereignisse über das ganze Jahr angenommen wird.

Bei der Aufstellung der Formel für den notwendigen Dividendenfonds haben wir im Dividendenteil zwischen Versicherungen, die bereits in die gewinnberechtigte Phase eingetreten sind und solchen, die erst gewinnberechtigt werden, zu unterscheiden.

In den folgenden Formeln basiert der notwendige Dividendenfonds auf dem vollständigen und dem Netto-Deckungskapital.

Um die Summation möglichst einfach darzustellen, definieren wir den Operator $+S_{(\tau \geq h)}$ als Summationszeichen, wobei über x, n und τ zu summieren ist. Der linksseitige Index gibt den Zeitpunkt der Summation an, während die zugelassenen τ durch den rechtsseitigen Index bestimmt werden; fehlt dieser, so ist über alle τ zu summieren. Die Versicherungsleistung sei generell "1".

Eine Gruppierung nach gleichem Tarifalter, gleicher künftiger Dauer oder gleichem erreichten Alter erfolgt nicht, vielmehr wird jede Versicherung einzeln in die Summation einbezogen. In der Praxis muss für jede Versicherung die entsprechende Leistung berücksichtigt werden. Formale Aenderungen ergeben sich dabei keine.

2.2.1. Konstante Dividende.

Bei einer konstanten Dividende vom Bruchteil Δ der Tarifprämie, erstmals fällig in h, letztmals in n-1, erhalten wir als notwendigen Dividendenfonds :

$$
{}_{t+\frac{1}{2}}S\left[1-d\left(\frac{1}{2}+\frac{N_{x+\tau+1}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right)+\beta\,\pi_x\,\frac{N_{x+\tau+1}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}+\right.
$$

$$
\left.+\gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{N_{x+\tau+1}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right)\right]+{}_{t+\frac{1}{2}}S_{(\tau<h)}\left[(1-\beta)\,\Delta\pi_x\,\frac{N_{x+h}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right]+
$$

$$
+{}_{t+\frac{1}{2}}S_{(\tau\geq h)}\left[(1-\beta)\,\Delta\pi_x\,\frac{N_{x+\tau+1}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right]-
$$

$$
-{}_{t+\frac{1}{2}}S\left[\pi_x\,\frac{N_{x+\tau+1}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}+{}_{t+\frac{1}{2}}V_x'\right].
$$

Ohne die Struktur unseres Dividendenplanes zu berühren, können wir rein formell allen Versicherten von Anfang an jährlich den Gewinnanteil $\Delta\Pi_x$ zukommen lassen und ihn denjenigen, die noch nicht gewinnberechtigt sind, jeweilen wieder wegnehmen. Auf Grund dieser Überlegung ist der Dividendenbarwert aequivalent

$$+\tfrac{1}{2}S\left[(1-\beta)\Delta\Pi_x \frac{N_{x+\tau+1}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right]-{}_{+\frac{1}{2}}S_{(\tau<h-1)}\left[(1-\beta)\Delta\Pi_x \frac{N_{x+\tau+1}-N_{x+h}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right].$$

Das zweite Glied, wir wollen es Korrekturglied nennen, lässt sich für einen gegebenen Bestand leicht annähern. Zeigt die Approximation, dass das Korrekturglied bezogen auf den Dividendenbarwert so klein ist, dass es vernachlässigt werden darf, so haben wir eine Vereinfachung des Rechenvorganges und des damit verbundenen Programms für die elektronische Rechenmaschine erreicht.

2.2.2. Steigende Dividende.

Als nächstes Beispiel wollen wir eine gemischte Versicherung mit steigender Dividende betrachten. Zur konstanten Dividende kommt eine in h + 1 beginnende, jährlich gleichmässig steigende Dividende hinzu, wobei der Steigerungssatz den Bruchteil δ der Tarifprämie betragen soll. Die letzte Dividendenauszahlung erfolgt wiederum in n-1. Das einzige Glied, das sich bei der Berechnung des notwendigen Dividendenfonds ändert, ist der Barwert der Gewinnanteile. Dieser setzt sich zusammen aus dem Barwert der konstanten Dividende

$$+\tfrac{1}{2}\,S_{(\tau<h)}\left[(1-\beta)\Delta\Pi_x \frac{N_{x+h}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right]+$$

$$+{}_{+\frac{1}{2}}S_{(\tau\geq h)}\left[(1-\beta)\Delta\Pi_x \frac{N_{x+\tau+1}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right],$$

dem Barwert der erreichten Höhe der Steigerung

$$+_{t+\frac{1}{2}} S_{(\tau \geq h)} \left[(1-\beta)(\tau-h)\delta \pi_x \frac{N_{x+\tau+1} - N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}} \right]$$

und demjenigen der künftigen Steigerung

$$+_{t+\frac{1}{2}} S_{(\tau < h)} \left[(1-\beta)\delta \pi_x \frac{S_{x+h+1} - S_{x+n} - (n-h-1) N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}} \right] +$$

$$+_{t+\frac{1}{2}} S_{(\tau \geq h)} \left[(1-\beta)\delta \pi_x \frac{S_{x+\tau+1} - S_{x+n} - (n-\tau-1) N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}} \right].$$

Zusammengefasst erhalten wir:

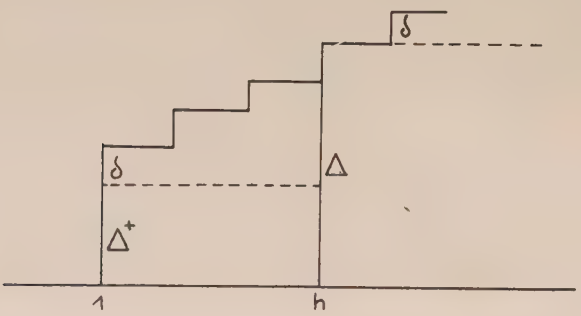
$$+_{t+\frac{1}{2}} S_{(\tau < h)} \left[(1-\beta) \left(\Delta \pi_x \frac{N_{x+h} - N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}} + \delta \pi_x \frac{S_{x+h+1} - S_{x+n} - (n-h-1) N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}} \right) \right] +$$

$$+_{t+\frac{1}{2}} S_{(\tau \geq h)} \left\{ (1-\beta) \left[(\Delta + (\tau-h)\delta) \pi_x \frac{N_{x+\tau+1} - N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \delta \pi_x \frac{S_{x+\tau+1} - S_{x+n} - (n-\tau-1) N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}} \right] \right\}.$$

Wollen wir die Zweiteilung in $\tau < h$ und $\tau \geq h$ umgehen, so stellen wir uns vor, die Dividende beginne in $\tau = 1$ und gehe in $\tau = h$ in die gegebene Dividende über. Beginnt die Steigerung in $\tau = 1$ selbst, und nennen wir den neuen Satz für den konstanten Dividendenanteil Δ^+, so gilt die Relation $\Delta^+ = \Delta - h\delta$.

Die folgende graphische Darstellung soll unser Vorgehen illustrieren :



Ziehen wir die beim "neuen" Gewinnplan zuviel angerechneten Dividenden in Form eines Korrekturgliedes wieder ab, so erhalten wir fürden Barwert der Gewinnanteile

$$t+\tfrac{1}{2}\,S\left\{(1-\beta)\left[(\Delta^{+}+\tau\,\delta)\,\pi_x\,\frac{N_{x+\tau+1}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,\delta\,\pi_x\,\frac{S_{x+\tau+1}-S_{x+n}-(n-\tau-1)\,N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right]\right\}-K$$

mit dem Korrekturglied

$$K=\,_{t+\frac{1}{2}}S_{(\tau<h-1)}\left\{(1-\beta)\left[(\Delta^{+}+\tau\,\delta)\,\pi_x\,\frac{N_{x+\tau+1}-N_{x+h}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,\delta\,\pi_x\,\frac{S_{x+\tau+1}-S_{x+h}-(h-\tau-1)\,N_{x+h}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right]\right\}.$$

2.3. Approximation einiger Korrekturglieder bezogen auf den jeweiligen Dividendenbarwert.

Die Berechnungen basieren auf natürlichen Gesamtheiten, wobei Gesamtversicherungssummen und Neuzugänge als konstant angenommen werden.

Die Karenzzeit h, das durchschnittliche Eintrittsalter x und die durchschnittliche Vertragsdauer n ergeben für das Korrekturglied K in % des Dividendenbarwertes die folgenden Werte :

h	x	n	K
a) Konstante Dividende			
3	25	15	3,2 %
2	25	15	1,1 %
3	45	15	3,8 %
2	45	15	1,3 %
3	30	30	1,2 %
2	30	30	0,4 %
b) Steigende Dividende			
3	25	15	1,5 %
2	25	15	0,5 %
3	45	15	1,8 %
2	45	15	0,6 %
3	30	30	0,45 %
2	30	30	0,15 %

Den wenigen Tabellenwerten ist bereits zu entnehmen, dass mit der Zunahme der durchschnittlichen Vertragsdauer der relative Betrag des Korrekturgliedes stark abnimmt, während das Eintrittsalter von untergeordneter Bedeutung ist. Die Verdreifachung der Barwerte der zuviel angerechneten Dividenden beim Übergang von h=2 auf h=3 rührt daher, dass auch in der Approximation die erste Gewinnausschüttung nicht in $t = 0$ stattfindet. Bei entsprechendem Vorgehen ergeben sich für h=4 Werte, die nahezu dem Doppelten derjenigen von h=3 entsprechen. Für h=3 und n=20 erhalten wir bei einer linear zunehmenden Gesamtversicherungssumme, wobei die jährliche Zunahme 5% des Anfangswertes beträgt, ein Korrekturglied, das rund 20 % grösser ist als dasjenige für die konstante Summe. Dieses eine Beispiel mag zeigen, dass für die Abschätzung des Korrekturgliedes auch die Bestandesentwicklung nicht ausser Acht gelassen werden darf.

2.4. Das Korrekturglied in der Praxis.

Steht uns zur Berechnung des notwendigen Dividendenfonds eine programmgespeicherte Elektronenmaschine zur Verfügung, so benötigen wir als Grundzahlen die $D_{x+\frac{1}{2}}$, N_x und S_x, wobei es allerdings genügt, die D_x oder die N_x zu speichern und die übrigen Grössen im Programm zu errechnen. Bei steigender Dividende werden mit Vorteil die N_x gespeichert, würde doch die Berechnung der S_x aus den D_x eine doppelte Summation erfordern.

Verwenden wir für den Dividendenbarwert die Näherungsformel, so können wir im Programm auf eine separate Behandlung der Versicherungen, die noch keine Gewinnbeteiligung aufweisen, verzichten. Die Einsparungen an Programmschritten und Rechenzeit sind selbst für grosse Bestände

gering,doch ist noch zu berücksichtigen, dass die Näherungsformel einen angemessenen Sicherheitszuschlag zugunsten des Versicherers aufweist. Für Dividendenpläne, die einigermassen den hier behandelten entsprechen, kann aus der vorangehenden Tabelle auf die Grössenordnung des Korrekturgliedes, bezogen auf den Dividendenbarwert, geschlossen werden. Wenn Angaben über die Ungenauigkeit der Formel erwünscht sind, obliegt es den einzelnen Gesellschaften,das ihrem Bestand entsprechende Korrekturglied zu approximieren und anschliessend über die Verwendbarkeit der Näherungsformel für den Dividendenbarwert zu entscheiden.

2.5. Dividende in Bonusform.

Zum Schluss dieses Abschnittes betrachten wir einen Gewinnplan mit Dividenden in Bonusform. Der Versicherte erhält jährlich, erstmals in $\tau = h$ und letztmals in $\tau = n-1$ eine Bonus-Gutschrift in der Höhe $r \cdot S$, womit sich der Barwert des jeweiligen Bonus von Jahr zu Jahr ändert. Dieser beträgt für den nach τ Jahren fälligen Bonus im Zeitpunkt τ

$$r\left(A_{x+\tau:\overline{n-\tau}|} + \gamma^{+}\,\ddot{a}_{x+\tau:\overline{n-\tau}|}\right),$$

wobei angenommen wird, der Bonus sei mit γ^{+}-Kosten behaftet. γ^{+} wird im allgemeinen kleiner als das γ der Grundleistung angesetzt. Auf kompliziertere Bonus-Systeme wollen wir nicht eintreten, bleiben doch die prinzipiellen Überlegungen dieselben.

Das Dividendenglied in der Formel für das Dividendendeckungskapital muss in bisherige und künftige Bonusausschüttungen unterteilt werden. Der Einfachheit halber betrachten wir zuerst eine einzelne Versicherung mit $\tau \geq h$. Dabei ist der Barwert der bisherigen Bonusausschüttungen gleich

$$(\tau-h+1)\,r\left(A_{x+\tau+\frac{1}{2}:\overline{n-\tau-\frac{1}{2}|}}+\gamma^{+}\ddot{a}_{x+\tau+\frac{1}{2}:\overline{n-\tau-\frac{1}{2}|}}\right)=$$

$$=(\tau-h+1)\,r\left(1-d\ddot{a}_{x+\tau+\frac{1}{2}:\overline{n-\tau-\frac{1}{2}|}}+\gamma^{+}\ddot{a}_{x+\tau+\frac{1}{2}:\overline{n-\tau-\frac{1}{2}|}}\right).$$

Entsprechend der Umformung auf Seite 9 erhalten wir

$$(\tau-h+1)\,r\left[1-(d-\gamma^{+})\left(\frac{1}{2}+\ddot{a}_{x+\tau+1:\overline{n-\tau-1|}}\right)\right]=$$

$$=(\tau-h+1)\,r\left[1-(d-\gamma^{+})\left(\frac{1}{2}+\frac{N_{x+\tau+1}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right)\right].$$

Für den Barwert der künftigen Bonusausschüttungen

$$r\sum_{t=1}^{n-\tau-1}\left(A_{x+\tau+t:\overline{n-\tau-t|}}+\gamma^{+}\ddot{a}_{x+\tau+t:\overline{n-\tau-t|}}\right)\frac{D_{x+\tau+t}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}=$$

$$=r\,\frac{R_{x+\tau+1}-R_{x+n}-(n-\tau-1)(M_{x+n}-D_{x+n})}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}+$$

$$+\gamma^{+}\,\frac{S_{x+\tau+1}-S_{x+n}-(n-\tau-1)N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}$$

erhalten wir unter Verwendung der leicht einzusehenden Aequivalenzen

$M_x=D_x-dN_x$ und $R_x=N_x-dS_x$

$$r\left(\frac{N_{x+\tau+1}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}-d\,\frac{S_{x+\tau+1}-S_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}+\frac{(n-\tau-1)\,dN_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}+\right.$$

$$\left.+\gamma^{+}\,\frac{S_{x+\tau+1}-S_{x+n}-(n-\tau-1)N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right)=$$

$$=r\left[\frac{N_{x+\tau+1}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}-(d-\gamma^{+})\,\frac{S_{x+\tau+1}-S_{x+n}-(n-\tau-1)\,N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right].$$

Die Relation $A_{x+\tau+t:\overline{n-\tau-t|}}=1-d\ddot{a}_{x+\tau+t:\overline{n-\tau-t|}}$

würde uns ohne Schwierigkeiten zum selben Resultat führen.

Für eine einzelne Versicherung mit $\tau < h$ erhalten wir als Barwert das einzige Glied

$$r\left[\frac{N_{x+h}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}-(d-\gamma^{+})\frac{S_{x+h}-S_{x+n}-(n-h)N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right].$$

Gehen wir zu einem offenen Bestand über, so nimmt der Dividendenbarwert folgende Form an :

$$+_{\tau+\frac{1}{2}}S_{(\tau<h)}\; r\left[\frac{N_{x+h}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}-(d-\gamma^{+})\frac{S_{x+h}-S_{x+n}-(n-h)N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right]+$$

$$+_{\tau+\frac{1}{2}}S_{(\tau\geq h)}\; r\left\{\frac{N_{x+\tau+1}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}-(d-\gamma^{+})\frac{S_{x+\tau+1}-S_{x+n}-(n-\tau-1)N_{x+n}}{D_{x+\tau-\frac{1}{2}}}+\right.$$

$$\left.+(\tau-h+1)\left[1-(d-\gamma^{+})\left(\frac{1}{2}+\frac{N_{x+\tau+1}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right)\right]\right\}.$$

Ist beim Ablauf der Versicherung ein weiterer Bonus in der Höhe u·r fällig, so ergibt dies die zusätzliche Erlebensfallkomponente $u\cdot r\,\frac{D_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}$, die ebenfalls mit Verwaltungskosten belastet werden kann.

3. Aenderungen des Dividendenplanes.

Wir setzen voraus, dass nach der Angleichung der Dividendenfonds gleich dem Dividendendeckungskapital ist. Es sei nach Definition

Dividendenfonds - Dividendendeckungskapital = U

und $\bar{\Delta}$ sei der Satz, um den wir Δ erhöhen oder bei negativem U erniedrigen, ausgedrückt als Bruchteil der Prämie, bzw. $\bar{\delta}$ der Satz, um den wir δ erhöhen oder erniedrigen.

3.1. Konstante Dividende.

Bei einem Gewinnplan mit konstanter Dividende ist

$$U = {}_{t+\frac{1}{2}}S_{(\tau<h)}\left[(1-\beta)\bar{\Delta}\,\pi_x\,\frac{N_{x+h}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right] + {}^{+}{}_{t+\frac{1}{2}}S_{(\tau\geq h)}\left[(1-\beta)\bar{\Delta}\,\pi_x\,\frac{N_{x+\tau+1}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right].$$

Für

$$C = {}_{t+\frac{1}{2}}S_{(\tau<h)}\left[(1-\beta)\,\pi_x\,\frac{N_{x+h}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right] + {}^{+}{}_{t+\frac{1}{2}}S_{(\tau\geq h)}\left[(1-\beta)\,\pi_x\,\frac{N_{x+\tau+1}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right]$$

erhalten wir

$$\bar{\Delta} = \frac{U}{C}.$$

3.2. Steigende Dividende.

Etwas eingehender wollen wir die steigende Dividende behandeln, setzt sich doch unser Versuchsbestand aus Versicherungen mit zunehmender Dividende zusammen. Formell gesehen bestehen folgende Möglichkeiten :

3.2.1. Aenderung von Δ

Aendern wir nur Δ , so erhalten wir dieselbe Formel wie bei der konstanten Dividende.

3.2.2. Aenderung von δ

Aendern wir nur δ , so erhalten wir

$$\delta = \frac{U}{A+B},$$

wobei

$$A = {}_{t+\frac{1}{2}}S_{(\tau<h)}\left[(1-\beta)\,\pi_x\,\frac{S_{x+h+1}-S_{x+n}-(n-h-1)N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right]$$

$$B = {}_{t+\frac{1}{2}}S_{(\tau\geq h)}\left\{(1-\beta)\left[(\tau-h)\,\pi_x\,\frac{N_{x+\tau+1}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,\pi_x\,\frac{S_{x+\tau+1}-S_{x+n}-(n-\tau-1)N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right]\right\}.$$

3.2.3. Aenderung von Δ und δ

Bei einer Aenderung von Δ und δ lautet die Grundgleichung :

$$U = \bar{\delta}\,(A+B)+\bar{\Delta}C$$

Das weitere Vorgehen kann auf mehrere Arten erfolgen. Wir beschränken uns auf zwei in der Praxis gut anwendbare Lösungen.

a) Wir setzen für $\bar{\Delta}$ einen festen Wert ein und berechnen das daraus resultierende $\bar{\delta}$ .Nach zwei- bis dreimaliger Durchführung sollte diese Rechnung ein befriedigendes Resultat ergeben, wird doch bei diesem Vorgehen das Verhältnis zwischen $\bar{\Delta}$ und $\bar{\delta}$ nur gefühlsmässig bestimmt. Für $\bar{\delta}$ erhalten wir die Gleichung

$$\bar{\delta} = \frac{U-\bar{\Delta}C}{A+B}$$

b) Das Verhältnis zwischen $\bar{\Delta}$ und $\bar{\delta}$ wird durch $\bar{\Delta}=\varepsilon\cdot\bar{\delta}$ von vornherein festgelegt, womit wir

$$\bar{\delta} = \frac{U}{A+B+\varepsilon C}$$

erhalten.

3.3. Dividende in Bonusform.

Beim Bonus-System treffen wir andere Verhältnisse an. Parallel zu unserem bisherigen Vorgehen können die zukünftigen Dividenden erhöht werden, doch besteht hier auch die Möglichkeit, die bereits gutgeschriebenen Dividenden ebenfalls zu erhöhen. Im letzteren Falle resultiert die additive Erhöhungskomponente aus

$$\bar{r} = \frac{U}{E+F+G},$$

wobei

$$E = {}_{t+\frac{1}{2}}S_{(\tau<h)}\left[\frac{N_{x+h}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}} - (d-\gamma^{+})\,\frac{S_{x+h}-S_{x+n}-(n-h)\,N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right],$$

$$F = {}_{t+\frac{1}{2}}S_{(\tau\geq h)}\left[\frac{N_{x+\tau+1}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}} - (d-\gamma^{+})\,\frac{S_{x+\tau+1}-S_{x+n}-(n-\tau-1)\,N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right]$$

und

$$G = {}_{t+\frac{1}{2}}S_{(\tau\geq h)}\,(\tau-h+1)\left[1-(d-\gamma^{+})\left(\frac{1}{2}+\frac{N_{x+\tau+1}-N_{x+n}}{D_{x+\tau+\frac{1}{2}}}\right)\right] \quad \text{ist.}$$

Sollen nur die künftigen Leistungen verändert werden, so reduziert sich die Formel auf

$$\bar{r} = \frac{U}{E+F}.$$

2. Teil.

Praktische Durchführung einer Dividendenkontrolle an einem Versuchsbestand.

4. Grundlegende Angaben

Anfangsbestand : 14 838 Versicherungen aus dem Bestand der Basler Lebensversicherungsgesellschaft.

Versicherungsarten : Gemischte und reine Todesfallversicherung.

Gewinnplan : Konstante Grunddividende von 12 %, erstmals fällig nach h=2 Jahren, letztmals nach n-1 Jahren. Steigende Dividende, jährlich um 1 % steigend, beginnend in h+1=3 mit 1 % und endend in n-1 mit n-3 %, d.h. die letzte Dividende in n-1 beträgt 10+n-3 %.

Tarif : Alle Versicherungen sind nach demselben Tarif gerechnet.

Reservealter und Versicherungsdauer sind nach den Gesetzen des Zufalls ausgewählt.

Zeit der Abschlüsse : Verteilt auf die Jahre 1952 - 1958.

Grundlagen 2. Ordnung : Sterbetafel aus dem Volksversicherungsbestand 1950/54.

Fixierung des Teilbestandes : Anfangs Januar 1961.

Bilanzpunkt : 31. Dezember 1960.

Technische Hilfsmittel : Nebst den konventionellen Maschinen einer Hollerith-Abteilung steht ein Elektronenrechner IBM 604 zur Verfügung.

Obwohl die angewandte Methode als für diese Berechnung einmalig betrachtet werden muss, dürfte deren Ausführung doch von gewissem Interesse sein, zeigt sie doch gerade den Unterschied zwischen einem kleinen Elektronenrechner und einer programmgespeicherten Maschine.

5. Kurze Beschreibung des Rechenvorganges.

Als Ausgangsmaterial hat mir freundlicherweise die Basler Lebensversicherungsgesellschaft die Lochkarten für die Reserverechnung des Teil-Bestandes, sowie alle nötigen Hilfsmittel zur Verfügung gestellt.

Die für unsere Berechnungen notwendigen Angaben der einzelnen Versicherungen werden in einem ersten Schritt dupliziert. Die neuen Lochkarten wollen wir Statistische Karten nennen.

Es erfolgen die Berechnung und Tabellierung der $D_{x+½}$, N_{x+1} , und S_{x+1} zu 3 1/4 und 3 3/4 %. Die entsprechenden Tabellen dienen als Grundlagen für Masterkarten mit den Werten $D_{x+½}$, N_{x+1} , S_{x+1} , x und x+1. Die Masterkarten ermöglichen uns die Anfertigung von Detailkarten mit den Angaben N_{x+n} , S_{x+n} , x+t, x+n, ä und Iä, wobei dieser Schritt vom Elektronenrechner in einem Durchgang bewältigt wird. In einem ersten Durchgang auf dem IBM 604 erhält jetzt jede Statistische Karte die Lochungen x+t und x+n, worauf der ganze Bestand mit den Detailkarten zusammen nach x+t und x+n geordnet wird. In einem zweiten Durchgang werden für alle Versicherungen die Werte Sä , Πä , $(t-2)\cdot$ $\cdot$ Πä und Π Iä berechnet und in die Karten gestanzt. Ein Tabulator besorgt das Aufaddieren der für die Schlussrechnung nötigen Angaben und liefert die entsprechenden Summen über den ganzen Bestand.

Das Deckungskapital wird nach der Hilfszahlmethode berechnet, die resultatmässig genau mit der Einzelrechnung übereinstimmt.

Damit besitzen wir die Werte, die wir zur Anwendung unserer Formel für das Dividendendeckungskapital benötigen. Der ganze Rechenablauf ist für die Zinssätze 3 1/4 und 3 3/4 % parallel durchgeführt worden, was nebst der normalen Auswertung der Resultate die Auswirkung einer Zinsfussänderung illustriert.

6. Zahlenmässige Ergebnisse.

Bestand		14 838	Versicherungen	
Total der Versicherungssummen :			153 910 323	
Total der Tarifprämien :			6 533 229	
Berechnete Summen :				
		3 1/4 %		3 3/4 %
$S\ddot{a}$		1 979 879 530		1 904 715 083
$\Pi\ddot{a}$		77 501 389		75 041 302
$(t-2)\Pi\ddot{a}$		189 118 695		183 303 480
$\Pi I\ddot{a}$		694 728 578		663 341 393
Aus diesen Summen erhalten wir :				
		3 1/4 %		3 3/4 %
$S\left(1-\frac{d}{2}-d\ddot{a}\right)$		89 167 535		82 283 706
$\Pi\ddot{a}\beta$		2 325 041		2 251 239
$S\frac{\gamma}{2}$		192 388		192 388
$S\ddot{a}_{\gamma}$		4 949 698		4 761 785
$\Pi\ddot{a}\Delta(1-\beta)$		9 021 161		8 734 807
$\Pi\ddot{a}(t-2)\delta(1-\beta)$		1 834 451		1 778 042
$\Pi I\ddot{a}\delta(1-\beta)$		8 738 867		6 434 407
Total		114 229 141		106 436 374
$\Pi\ddot{a}$	-	77 501 389	-	75 041 302
$t+\frac{1}{2}V'$	-	33 096 182	-	33 096 182
Dividendendeckungskapital	+	3 631 570	+	1 701 110

Das einzige dieser Resultate, das vorerst überraschen mag, ist wohl dasjenige für $(t-2)\ \pi\ddot{a}$, entspricht doch dieser Wert nur dem Dreifachen von $\pi\ddot{a}$. Wenn wir jedoch bedenken, dass die Abschlüsse aus den Jahren 1952-58 datieren, also $t-2$ im Mittel etwa 3 sein wird, dürfte auch diese Zahl erklärt sein.

7. Berechnung der Aenderungssätze.

Da es sich bei unserem Bestand um einen, gegenüber dem Gesamtbestand kleinen und sehr jungen Teilbestand handelt, wäre es ein höchst fragwürdiges Unterfangen, aus dem Gesamtdividendenfonds auf den Fonds für unser Beispiel schliessen zu wollen.

Wir nehmen deshalb für den Dividendenfonds drei Werte so an, dass die prinzipiellen Möglichkeiten der Auswertung, nämlich Erhöhen, Belassen und Erniedrigen der Dividende, zum Zuge gelangen.

Unter A wird jeweilen nur Δ, unter B nur δ und unter C werden Δ und δ im Verhältnis 12:1 geändert.

Zinsfuss :			3 1/4%	3 3/4%
Dividendenfonds :	Fr. 7 000 000			
	A	$\bar{\Delta}$ in %	4,6	12,0
	B	$\bar{\delta}$ in %	0,40	1,06
	C	$\bar{\Delta}$ in %	2,4	6,2
		$\bar{\delta}$ in %	0,20	0,51
Dividendenfonds :	Fr. 3 000 000			
	A	$\bar{\Delta}$ in %	- 0,8	6,5
	B	$\bar{\delta}$ in %	- 0,07	0,57
	C	$\bar{\Delta}$ in %	- 0,4	3,3
		$\bar{\delta}$ in %	- 0,03	0,28
Dividendenfonds :	Fr. 1 000 000			
	A	$\bar{\Delta}$ in %	- 6,2	1,0
	B	$\bar{\delta}$ in %	- 0,54	0,09
	C	$\bar{\Delta}$ in %	- 3,2	0,5
		$\bar{\delta}$ in %	- 0,26	0,04

3. Erläuterungen zu den Resultaten.

Die Werte 7 000 000 und - 1 000 000 wirken sehr demonstrativ, sind jedoch so extrem, dass wir annehmen dürfen, der tatsächliche Fonds befinde sich irgendwo dazwischen.

Da unsere Formeln für die Berechnung von $\bar{\Delta}$ und $\bar{\delta}$ linear sind, können wir die Aenderungen für jeden weiteren Fonds durch lineare Interpolation berechnen. Die Resultate für den Fonds 3 000 000 dienen hier nur als Kontrolle und illustrieren für i=3 1/4 % gleichzeitig die Auswirkung eines geringen Unterschiedes zwischen Dividendenfonds und -dekkungskapital.

Während die Interpolation von Dividendenfondswerten in der Praxis kaum von Bedeutung sein wird, da der Fonds als gegeben zu betrachten ist, dürfte sie beim Zinsfuss nicht immer zu umgehen sein. In unserem Falle würden die beiden verwendeten Zinssätze Inter- und Extrapolation von 3-4 % ermöglichen, wobei der begangene Fehler im Vergleich zur Ungenauigkeit, die der Wahl des zu verwendenden Zinsfusses und den Rundungen der Endresultate für $\bar{\Delta}$ und $\bar{\delta}$ anhaftet, sehr klein ist.

Zusammenfassung

1. Teil

Die Einführung einer elektronischen Datenverarbeitungsmaschine ermöglicht in der Grosslebensversicherung das Berechnen des Deckungskapitals aufgrund der Einzelrechnung. Ohne grossen Mehraufwand kann gleichzeitig auch der Dividendenbarwert errechnet werden, womit es naheliegend ist, in Intervallen von drei bis fünf Jahren genaue Dividendenkontrollen durchzuführen.

Für drei in der Schweiz häufig vorkommende Gewinnpläne werden die Formeln für die Berechnung des Dividendenbarwertes und der Dividendenanpassung hergeleitet.

Für den Dividendenbarwert zweier Gewinnpläne sind Näherungsformeln angeführt, wobei eine Tabelle über deren Genauigkeit Auskunft gibt.

2. Teil

Für einen Versuchsbestand werden das Deckungskapital und das Dividendendeckungskapital berechnet. Die Dividendenangleichungen basieren auf angenommenen Dividendenfonds und dienen nicht zur Illustration der heutigen Verhältnisse, sondern zeigen die Auswirkung der Angleichung bei möglichst unterschiedlichen Voraussetzungen.

Literaturverzeichnis

1. E. Zwinggi: Versicherungsmathematik; Basel 1958.

2. W. Saxer: Versicherungsmathematik, 1. Teil; Würzburg 1955.

3. P. Böhmer, K. Rohde und H. Wulkow : Die technischen Erfordernisse bei der Berechnung der Dividendenreserve; Berlin 1912.

4. Transactions - XVth International Congress of Actuaries; New York 1957, Vol. 1,3 und 4.

Curriculum vitae

Ich wurde am 22. Oktober 1935 als Sohn des Herbert Spengler und der Lina Spengler, geborene Klaiss, in Basel geboren, wo ich vier Jahre die Primarschule und acht Jahre das Mathematisch-Naturwissenschaftliche Gymnasium besuchte.

Nach bestandener Maturität studierte ich an der Universität Basel Mathematik, Zoologie, Botanik und Geographie. Im Anschluss an die wissenschaftliche Mittellehrerprüfung wandte ich mich der Versicherungslehre zu. Meine Dissertation schrieb ich unter der Leitung von Herrn Professor Dr. Ernst Zwinggi.

Während meines Studiums besuchte ich Vorlesungen und Übungen bei folgenden Dozenten: H. Annaheim, E. Batschelet, F. Blumer, P. Buchner, R. Conzelmann, M. Eichler, J. Fleckenstein, M. Geiger-Huber, R. Geigy, M. Gürtler, E. Handschin, H. Huber, P. Huber, P. Leepin, H. Nüesch, A. Ostrowski, A. Portman, P. Quinche, E. Schubarth, O. Schüepp, A. Speiser, L. Vonderschmitt, P. Vosseler und E. Zwinggi.